Lección
7
El conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$)

Conjunto de los números complejos

Objetivo: Explicar la necesidad de expandir el conjunto de los números reales.

¿Qué conjuntos numéricos conoces? Nómbralos y da ejemplos de números que pertenezcan a ellos.

¿Qué métodos utilizas para comprobar las soluciones al resolver una ecuación?

1. Jaime resuelve las siguientes ecuaciones y anota el conjunto al cual pertenece su solución.

Ecuación	Conjunto
$2x + 3 = 8$	$\mathbb{Z}$
$7x + 8 = 4x - 6$	$\mathbb{Q}$
$x^2 + 4x - 4 = 0$	$\mathbb{R}$
$7x - 4 = 2x + 4$	$\mathbb{N}$

   a. Verifica que la solución de cada ecuación pertenece al conjunto correspondiente. En caso de que este último no contenga la solución, indica todos los conjuntos a los que pertenece.

   b. De acuerdo con la ecuación $x^2 - 7 = 0$, ¿por qué es incorrecto afirmar que sus soluciones pertenecen al conjunto de los números racionales?

Se dice que una ecuación no tiene solución en un conjunto numérico cuando su solución no pertenece a este. Por ejemplo, la ecuación $x + 1 = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números naturales, ya que su solución, $x = -1$, no pertenece a $\mathbb{N}$, pero sí tiene solución en los conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, y $\mathbb{R}$, ya que -1 pertenece a estos conjuntos. De esta manera, se hace necesario expandir un conjunto numérico con el fin de evaluar la solución de determinadas ecuaciones.

2. Resuelve las ecuaciones hasta identificar el factor $\sqrt{-1}$. Guíate por los ejemplos.

$x^2 + x + 1 = 0$ $\qquad$ $x^2 - 3x + 3 = 0$ $\qquad$ $2x^2 - 2x + 5 = 0$

Ejemplo 1: $x^2 + 60 = -4$

$$x^2 = -64$$
$$x = \pm\sqrt{-64}$$
$$x = \pm\sqrt{64}\cdot\sqrt{-1}$$
$$x = \pm 8\sqrt{-1}$$

Ejemplo 2: $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$
$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 4\sqrt{-1}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{-1}$$

¿Qué relación hay entre el factor $\sqrt{-1}$ y que las ecuaciones no tengan solución en el conjunto de los números reales? Argumenta tu respuesta.

Existen ecuaciones que no tienen solución en el conjunto de los números reales. Es decir, no existe en este conjunto un número cuyo cuadrado sea un número negativo. Surge así un tipo de número, llamado **número imaginario**, cuya unidad imaginaria se denota por la letra i y se define como: $i = \sqrt{-1}$.

Si se multiplica la unidad imaginaria por un número real b distinto de cero, resulta un número imaginario, que se simboliza por bi. Además, si se multiplica la unidad imaginaria por sí misma, se obtiene la potencia i^2, cuyo valor es -1.

Las potencias de los números imaginarios, cumplen con las siguientes propiedades:

$i^0 = 1$ $\qquad$ $i^m \cdot i^n = i^{n+m}$ $\qquad$ $\left(i^n\right)^m = i^{n\cdot m}$ $\qquad$ con $m, n \in \mathbb{Z}_0^+$.